***Лекция 6***

**КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

\* в развитие идей Михаила Валентиновича Миронова

**Теорема о распределении скоростей в твердом теле**

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Формула Эйлера.**

**Угловая скорость тела**

***Вектором в теле*** назовем любой вектор , соединяющий две точки тела. Все векторы в теле постоянны по модулю и изменяют только свое направление, поворачиваясь вместе с телом.

Понятно, что столбец проекций вектора на оси неподвижной системы

можно связать с его производной

матрицей 3х3 бесчисленным образом.

 Нас интересует, существует ли среди этого множества матрица Ω, являющаяся общей для всех векторов в теле, иначе говоря, характеризующая движения всего тела. Как известно, производная по времени от постоянного по модулю вектора перпендикулярна самому вектору. Отсюда

Итак

Чтобы матрица не зависела от вектора в теле, все коэффициенты при проекциях вектора с необходимостью должны быть равны нулю.

Здесь обозначения трех ненулевых элемента матрицы введены по образцу присоединенной матрицы вектора в правоориентированном пространстве.

Элементам матрицы можно придать простой геометрический смысл. Это проекции скорости конца орта с первым индексом при его вращении вокруг орта со вторым индексом на третье направление по правилу правого винта. Так

означает, что конец орта **i** движется против оси z при его вращении вокруг оси у. Понятно, почему элементы с повторяющимися индексами равны нулю. Направление вектора угловой скорости в право ориентированном пространстве наглядно иллюстрирует анимация

<http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/ClassMechanics/RotatingWheel/RotateWithOmega.html>

Таким образом, общая для всех векторов в теле матрица существует и она - кососимметричная. Назовем ее ***матрицей угловой скорости тела.*** Из ее трех элементов можно составить сопутствующий ***вектор угловой скорости тела.***

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Таким образом, мы пришли к **матричной формуле Эйлера**

которой соответствует **векторная формула Эйлера**

Формулы показывают, что производные по времени от всех векторов в теле выражаются через единую для тела угловую скорость тела.

**Теорема о распределении скоростей в теле.**

**Метод полюса.**

 Формула Эйлера дает возможность выразить характеристики движения всех точек тела через характеристики движения одной, специально выбранной нами точки тела, называемой ***полюсом.*** Такой прием называется ***методом полюса***.



 Рассмотрим произвольную точку тела В. Исходным в методе полюса является выражение радиуса - вектора произвольной точки тела через радиус - вектор полюса А:

Дифференцируя (1) по времени, находим

Для вектора в теле **АВ** справедлива формула Эйлера.

Таким образом, приходим к ***теореме о распределении скоростей*** в твердом теле

 (15)

 Матричная запись этой теоремы в произвольной системе координат имеет вид:

 ***Следствия из теоремы о распределении скоростей***

 а) Если скорости двух точек тела А и В одинаковы, то угловая скорость параллельна АВ. Например при вращении тела вокруг неподвижной оси скорости точек этой оси равны нулю. Поэтому вектор угловой скорости параллелен оси вращения Z. Обычно его изображают на оси (Рис.2) и направляют по правилу правого винта. Смотрите

<http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/ClassMechanics/RotatingWheel/RotateWithOmega.html>

 б) Cправедливо и обратное. Скорости точек прямой, параллельной угловой скорости, одинаковы в данный момент



 в) *Теорема о проекциях скоростей* Проекции скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки, равны. Для доказательства спроектируем теорему на ось z, проходящую через обе точки. С учетом взаимной перпендикулярности и векторного произведенияполучаем**:**



Эта теорема отражает понятное требование неизменности расстояния между точками твердого тела.

 ***Пример***: Найдем отношение скоростей точек А и В шатуна АВ кривошипно-шатунного механизма. Точка А принадлежит кривошипу ОА, вращающемуся вокруг оси О. Она движется по окружности, значит ее скорость перпендикулярна ОА. Точка В скользит вдоль прямой ОВ и ее скорость направлена вдоль этой прямой. По теореме о проекциях скоростей имеем



Работу кривошипно-шатунного механизма наглядно демонстрируют анимации



<http://www.technologystudent.com/cams/crank1.swf>

<http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/bielle.html>

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011